

Série dénombrement

Exercice 1 :

1). A l'aide des chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 combien peut on écrire:

- a). de nombres de trois chiffres?
- b). de nombres de trois chiffres distincts?
- c) de nombres de six chiffres?
- d). de nombres de six chiffres distincts?
- e). de nombres pairs de six chiffres distincts?

2). Mêmes questions si on dispose des chiffres 0, 1, 2, 3, 4 et 5.

Exercice 2 :

On jette trois dés de couleurs différentes ayant des faces numérotées de 1 à 6.

- 1). Dénombrer tous les résultats possibles.
- 2). Dénombrer les résultats comportant un seul 3.
- 3). Dénombrer les résultats comportant exactement deux 4.
- 4). Dénombrer les résultats ne comportant aucun 2.
- 5). Dénombrer les résultats comportant trois numéros distincts.

Exercice 3 :

1). Montrer que pour tout n , p et k entiers tels que $0 \leq k \leq p \leq n$, on a:

$$C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$$

2). En déduire que pour tout n et p entiers tel que $0 \leq p \leq n$ on a:

$$\sum_{k=0}^p C_n^k \cdot C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p$$

Exercice 4 :

Une urne contient 4 boules portant les numéros 0, 0, 1, 2 et 3 boules noires portant les numéros 0, 1 et 2.

On suppose que les boules sont indiscernables au toucher.

I- On tire simultanément quatre boules de l'urne.

Déterminer le nombre de tirages dans chacun des cas suivants:

A "tirer trois boules de même couleur "

B "tirer au moins une boules noire"

C "tirer exactement une boule noire et exactement une boule portant le numéro 0.

II- On tire successivement et avec remise quatre boules de l'urne.

Déterminer le nombre de tirages dans chacun des cas suivants:

D "tirer quatre boules de même couleur"

E "tirer exactement deux boules blanches"

F "obtenir pour la première fois une boule portant le numéro 0 au troisième tirage"

G "le produit des numéros obtenus est égal à 0"

Exercice 5 :

Soit n un entier naturel et x un réel positif.

1). a). Développer $(1 + x)^n$.

b). En déduire que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

2). Soit $u_n = \frac{n!}{n^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2$.

En déduire que pour tout n de \mathbb{N}^* $u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.